Argomenti delle singole lezioni del corso di Analisi Matematica 1
(Laurea triennale di Matematica, A.A. 2019-20)

NB. Le indicazioni bibliografiche si riferiscono al libro di testo.

Lezione nr. 1, 28/9/2020.

Cenni a "logica" e "insiemi". Unione e intersezione di famiglie di insiemi. Insieme delle parti $\mathcal{P}(X)$.
Relazioni $\mathcal{R}$ di A in B; relazioni in A.
Classi di relazioni in: di equivalenza, di ordine (parziale o totale, esempi: "$\leq$" è un ordinamento totale in $\mathbb{R}$, "$\subseteq$" è un ordinamento parziale in $\mathcal{P}(X)$), funzioni; dominio e grafico di funzione; la notazione $f : A \to B$ ("f associa ad ogni $x \in A$ un elemento $y \in B$ che si denota con $f(x)$").
Assiomi dell'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali; l'assioma di completezza.

Lezione nr. 2, 30/9/2020.

Funzioni iniettive, surietive e biiettive/biunivoche.
Maggiorante e minorante di $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$; $\max A$, $\min A$; insieme (superiormente, inferiormente) limitato; massimo e minimo di un insieme. Esistono insiemi limitati che non hanno massimo né minimo (per esempio l'intervallo $(0,1) = \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x < 1\}$).
Le funzioni $|x|$, $\operatorname{sgn} x$, x^+ e x^-; $x = x^+ - x^-$ e $|x| = x^+ + x^-$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Proprietà elementare del valore assoluto. Disuguaglianza triangolare. Media aritmetica di due numeri reali. Distanza (detta euclidea) tra due numeri reali. Intervalli reali.
Funzioni pari e dispari.
Sottoinsiemi induttivi di $\mathbb{R}$; definizione di $\mathbb{N}$ come il più piccolo sottoinsieme di $\mathbb{R}$.
Se $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ e $n < x < n+1$, allora $x \neq \mathbb{N}$ (usare, per ogni n fissato, l'insiemi induttivo $\{1,2,3,\dots,n\} \cap [n+1,+\infty)$, che non contiene x ma, per la definizione di $\mathbb{N}$ come il più piccolo insieme induttivo in $\mathbb{R}$, contiene tutti i numeri naturali).
Principio di induzione (ancora da dimostrare).

Esercizio utile: 1.3 del libro (unicità del massimo e del minimo di un insieme).

Lezione nr. 3, 1/10/2020.

Dimostrazione del principio di induzione. Applicazione: disuguaglianza di Bernouilli.
Sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ ammettono minimo.

Definizione di funzione inversa, $f^{-1} : B \to A$ di una funzione biunivoca $f : A \to B$.
$(x,y) \in \operatorname{graf} f \Leftrightarrow (y,x) \in \operatorname{graf} f^{-1}$; $f(x) = y, x \in A, y \in B \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x, x \in A, y \in B$.
Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ i grafici di f e f^{-1} sono simmetrici rispetto alla bisettrice $y = x$.

Successioni in $A \neq \varnothing$. Successioni ricorsive.

Lezione nr. 4, 5/10/2020.

Definizioni ricorsive di sommatorie, di potenze con esponente naturale e di $n!$.
Somme geometriche.
Coefficienti binomiali e le loro proprietà elementari. Triangolo di Pascal-Tartaglia.
Binomio di Newton.

Insiemi finiti e infiniti. Cardinalità di insiemi finiti. Insiemi equipotenti. Insiemi numerabili e le loro proprietà elementari.

Lezione nr. 5, 7/10/2020.

Le notazioni B^A e $2^{\mathbb{N}}$. L'insieme $2^{\mathbb{N}}$ è equipotente all'insieme delle parti di $\mathbb{N}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, e non è numerabile.
Gli insiemi $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Z}$ e $\mathbb{Q}$ sono insiemi numerabili.
La decomposizione $x = [x] + \{x\}$ in parte intera e parte frazionaria ($\forall\, x \in \mathbb{R}$). Grafici di $x \mapsto [x]$ e di $x \mapsto \{x\}$ ($x \in \mathbb{R}$). Attenzione: $[5/3] = 1$ ma $[-5/3] = -2$.
Non esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che $r^2 = 2$.
Definizione di $\sup A$ e $\inf A$. Se esiste $\max A$, allora esiste $\sup A$ e $\sup A = \max A$.
L'esistenza di $\sup A$ se A è non vuoto e limitato superiormente. L'equivalenze dell'assioma di completezza in $\mathbb{R}$ e l'esistenza di $\sup A$ per ogni $A \subset \mathbb{R}$ che è limitato superiormente.

Lezione nr. 6, 8/10/2020.

Caratterizzazione di $\sup A$ e $\inf A$.
Insiemi superiormente limitati contenuti in $\mathbb{N}$ o in $\mathbb{Z}$ ammettono massimo. Definizione precisa di parte intera di un numero reale. Proprietà di Archimede (prop 1.97). $\mathbb{N}$ non è limitato. Densità dei numeri razionali in $\mathbb{R}$ (prop 1.100)
Distanza euclidea $d(x, A)$ tra $x \in \mathbb{R}$ e $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$.
Distanza euclidea tra due insiemi $\varnothing \neq A \subseteq \mathbb{R}$ e $\varnothing \neq B \subseteq \mathbb{R}$: $d(A, B) = \inf\{|a - b|;\, a, \in A,\, b \in B\})$.
Definizione, esistenza e unicità di $\sqrt[n]{x} = x^{1/n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$

Lezione nr. 7, 12/10/2020.

Definizione di x^r per $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, e $r = p/n \in \mathbb{Q}$, $r > 0$.
Possibile definizione di potenze di x per valori negativi di n (e.g., se $x < 0$, allora $\exists\, \sqrt[3]{x} \in \mathbb{R}$ ma $\nexists\, \sqrt{x} \in \mathbb{R}$)
Funzioni (strettamente) monotòne. Monotonia di funzioni composte da funzioni monotòne.
$\mathbb{R}$ esteso ($\mathbb{R}^*$); definizioni di $\sup A = +\infty$, $\inf A = -\infty$
Intervalli, intervalli aperti e chiusi
Intorni, intorni simmetrici, propietà elementari degli intorni (Prop. 2.9)
Definizione di "definitivamente per $x \in x_0 \in \mathbb{R}^*$"
Punti interni, isolati, di accumulazione; interno di un insieme; derivato di un insieme; le notazini $\mathcal{D}^* A$ e $\mathcal{D} A$.
Definizione di limite di $f : A \to \mathbb{R}$ per $x \to x_0 \in \mathcal{D}^*(A)$; esempi, verifica di un limite con la definizione.
Unicità del limite